生産者理論

阪本浩章 [*]

初稿：July 3, 2015　改訂：December 24, 2021

Contents

1 生産者の意思決定モデル **3**
1.1 生産技術 3
1.2 生産者の意思決定 4

2 生産関数と費用関数 **6**
2.1 生産関数 6
2.2 費用関数 8
2.3 生産関数と費用関数との関係 10

3 供給関数と要素需要関数の導出 **12**
3.1 供給関数と要素需要関数 12
3.2 限界費用関数と供給関数 16
3.3 幾何的な説明 19

4 集計 **21**
4.1 財供給の集計 21
4.2 逆集計供給関数 22
4.3 労働需要の集計 24

A 補論： 複数の生産要素を投入する場合 **25**
A.1 生産技術と生産者の意思決定 25
A.2 生産関数を用いた表現 26
A.3 費用関数を用いた表現 29
A.4 定理 1 の証明 34

[*]神戸大学経済学研究科 (sakamoto@econ.kobe-u.ac.jp)

このノートで学ぶこと

- 生産技術
  - 技術： 生産集合，生産関数，あるいは費用関数によって表現される
  - 生産集合 Y： 実現可能な生産パターンを全て列挙したもの
  - 生産関数 $f(z)$： 一定の生産要素 z からどれだけの生産物を作れるか
  - 費用関数 $c(x)$： 一定の生産物 x を作るのにどれだけの費用が必要か
  - $f(z)$ の逆関数 $C(x)$ に要素価格 w を掛けたものが費用関数 $c(x) = wC(x)$
- 企業の意思決定
  - 企業は利潤を最大化するように生産パターン $(z, x) \in Y$ を選ぶ
  - 生産集合 $Y \subset \mathbb{R}^2_+$ を持つ企業は次を満たすように (z^*, x^*) を選ぶ：

$$(z^*, x^*) \in \underset{(z,x)\in Y}{\operatorname{argmax}} \{px - wz\} \tag{1}$$

  - 企業が選ぶ生産パターン (z^*, x^*) は財価格 p や生産要素価格 w に依存する．生産要素の投入量 z^* を (w, p) の関数と見たものを要素需要関数 $z^d(w, p)$，生産物の産出量 x^* を (w, p) の関数と見たものを供給関数 $x^s(w, p)$ と呼ぶ
- 要素需要関数と供給関数
  - 技術を生産集合 Y ではなく生産関数 $f(z)$ で表すと，(1) は

$$z^* \in \underset{z\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{pf(z) - wz\} \quad \text{and} \quad x^* = f(z^*)$$

    に等しく，したがって (z^*, x^*) は次の連立方程式を解く：

$$pf'(z^*) = w \quad \text{and} \quad x^* = f(z^*) \tag{2}$$

  - 技術を生産集合 Y ではなく費用関数 $c(x)$ で表すと，(1) は

$$x^* \in \underset{x\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{px - c(x)\} \quad \text{and} \quad z^* = c(x^*)/w$$

    に等しく，したがって (z^*, x^*) は次の方程式を解く：

$$p = c'(x^*) \quad \text{and} \quad z^* = c(x^*)/w \tag{3}$$

  - 供給関数は限界費用関数の逆関数になる（これは (3) による）
- 集計
  - 集計供給関数： $X^s(w, p) := \sum_{j=1}^{J} x^s_j(w, p)$
  - 逆集計供給関数： $X^s(w, p)$ の p に関する逆関数 $p^s(X)$
  - 集計労働需要関数： $Z^d(w, p) := \sum_{j=1}^{J} z^d_j(w, p)$

1　生産者の意思決定モデル

経済学では，生産（production）という言葉を非常に広い意味で用いる．工場で労働者を雇ってボールペンを製造するのはもちろん生産であるが，例えば自動車とドライバーを用いて輸送サービスを提供することも，同様に生産と呼ばれる．あるいは，シェフが食材と調理器具を使って料理を作ることも生産活動の一種と見なされる．要は「何かを用いて何かを生み出す活動」を生産と呼ぶのである．そして，前者の「何か」のことを生産要素（production factor）と呼び，後者の「何か」を生産物（product）と呼ぶ．我々の目的は，生産に関する意思決定を数学を用いて記述することである．

1.1　生産技術

生産という言葉がそうであるように，生産技術（technology）という言葉も，経済学では通常よりも広い意味で用いられる．物理的な財を産み出すための工学的な手法はもちろんのこと，大量の荷物を一定時間内に配達するノウハウや，食材に応じて手際良く料理を作る匠の業も，ここで言うところの生産技術に含まれる．このような意味での生産技術を，我々は「その技術の下でどのような生産パターンが可能となるのか」を記述することによって表現する．

具体的な例として，労働者を雇ってトマトを栽培する農園を考えよう．この農園では，労働者に毎日 4 時間（半日）の農作業に従事してもらえば一年間に 2 トンのトマトを生産できる．あるいは 9 時間（丸一日）の労働によって，年間生産量を 3 トンに増産することも可能である．また，やろうと思えば，毎朝 1 時間の手入れだけでも 1 トンの年間生産量は固いという．この時，この農園の経営者が選ぶことのできる「労働投入量とトマト生産量のペア」は

$$Y := \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\} \tag{4}$$

という $\mathbb{R}^2_+$ の部分集合によって表現することができよう[1]．このような，ある生産技術の下で選ぶことのできる投入量と産出量のペア[2]を集めたものを，生産集合（production set）と呼ぶ．生産集合は，技術的に実現可能な生産パターンを全て列挙したものと考えてよい．生産集合が Y で与えられている時，例えば労働時間 z を投入してトマトを x だけ生産することが技術的に可能（feasible）であるという事実は，$(z,x) \in Y$ のように表記することができる．逆に，労働時間 z を投入し

[1]農作業を全く行なわない（つまりは労働時間を 0 にする）という選択もあり得るので，$(0,0)$ というペアを選択肢の一つに加えた．また，生産した財を費用をかけずに廃棄できるならば（つまりトマトを大量に捨てても誰からも怒られないのであれば），Y には $(1,0)$ や $(4,0)$, $(4,1)$, $(9,0)$, $(9,1)$, $(9,2)$ といったペアも含まれる．ただ通常はそのような生産パターンは選択されないので，(4) のような Y を考えれば十分である．

[2]投入量と産出量からなるペア（ベクトル）のことを，生産計画（production plan）と呼ぶこともある．

てもトマトを x だけ生産することができない（infeasible）場合には，$(z,x) \notin Y$ のように表記されよう．(4) の例では，$(4,2) \in Y$ なので $(z,x) = (4,2)$ という生産パターンは技術的に選択可能であるが，$(4,4) \notin Y$ なので $(z,x) = (4,4)$ というパターンは選択不可能である．

当然ながら，ある技術の下では不可能な生産パターンであっても，他の技術の下では可能になる場合もある．例として，先程とは別のトマト農園を考えよう．こちらの農園では，トマト栽培に関する優れたノウハウが蓄積されていると仮定する．するとこの農園の生産技術は，例えば

$$\tilde{Y} := \{(0,0),(1,2),(4,4),(9,6)\} \tag{5}$$

のような生産集合によって表現することができるだろう．先程の Y という生産技術の下では，$(z,x) = (4,4)$ という生産パターンは選択不可能であった．一方，$\tilde{Y}$ が表現する生産技術の下ではそれが可能となる．つまりこの農園では，4 時間の労働投入で年間 4 トンのトマトを栽培することができる．あるいは労働者に 9 時間働いてもらえば，生産量を 6 トンに増やすことも可能である．同じ 2 トンの年間生産量を実現するのでも，先程の農園では 4 時間の労働が必要であったが，この農園では毎朝 1 時間の手入れだけでで済んでしまう．このように，生産技術の違いは生産集合の違いによって表現することができる．

1.2　生産者の意思決定

生産者の意思決定モデルは，消費者のそれと大きく変わるものではない．我々は生産者についても，「選び得る選択肢の中からその生産者にとって最も好ましいもが選択される」と考える．消費者の場合，選択肢の集合は予算集合と呼ばれるものによって表現されていた．一方，生産者にとっては生産集合が選択肢の集合である．つまり，生産集合に含まれるものであれば，生産者はどのような投入量と産出量のパターンも選ぶことができる．したがって意思決定のモデルとしては，生産集合に含まれる選択肢の中から，生産者にとって一番「好ましい」生産パターンが選ばれる，と考えるのが自然であろう．

もっとも，生産者にとって何が「好ましい」ものであるかは必ずしも自明でない．トマトを家庭菜園で栽培する生産者であれば，家族で食べる分だけを必要最小限の費用で生産するのが好ましいということになるだろう．あるいは，スペインのトマト投げ祭の準備を任された農家であれば，採算度外視で可能な限り大量のトマトを生産したいと思うかもしれない．潜在的には，生産者ごとに様々な好ましさの基準が考えられてよい．その中で，経済学の生産者理論がもっぱら分析の対象とするのは，「利潤の最大化」を目的とするような生産者である．つまり経済学では，与えられた技術の下で実現可能な生産パターンの中から，自らの利潤を最大にする選択肢を選ぶような生産者を考える．そのような生産者のことを，我々

は企業（firm）と呼ぶ.

利潤（profit）とは，収益（revenue）から費用（cost）を減じたものである．例えば，ある企業が z だけの生産要素を投入して，x だけの生産物を生産・販売したとしよう．生産要素の単位価格を w，生産物の単位価格を p で表わせば，この時の利潤は

$$px - wz \tag{6}$$

となる．ここで px と wz は，収益と費用をそれぞれ表わす．したがって，利潤の最大化を目的とする企業の意思決定は，次のように表現できるだろう．つまり，$Y \subset \mathbb{R}^2_+$ という生産集合を持つ企業は

$$px^* - wz^* \geq px - wz \quad \forall (z, x) \in Y \tag{7}$$

を満たすような $(z^*, x^*) \in Y$ を選ぶ．さらにここで，関数 $\pi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を

$$\pi(z, x) := px - wz \quad (z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{8}$$

で定義すれば，(7) は

$$(z^*, x^*) \in \operatorname*{argmax}_{(z,x)\in Y} \pi(z, x) \tag{9}$$

のように，関数の最大化問題として書き換えることができる．このような問題を利潤最大化問題（profit maximization problem）と呼び，(9) を満たす (z^*, x^*) をその解と呼ぶ．つまり利潤最大化問題の解は，生産集合 Y 上で関数 π の最大値を与えるものに他ならない．

明らかに，利潤最大化問題の解は生産要素価格 w や生産物価格 p によって変わってくる．具体的な例として，ある企業の生産集合 Y が (4) で与えられている場合を考えよう．この時，例えば生産要素価格と生産物価格が $(w, p) = (1, 4)$ であれば，

$$\pi(0, 0) = 0, \quad \pi(1, 1) = 3, \quad \pi(4, 2) = 4, \quad \pi(9, 3) = 3 \tag{10}$$

と計算できるから，利潤最大化問題の解は $(z^*, x^*) = (4, 2)$ である．一方，価格ベクトルが $(w, p) = (2, 12)$ に変化したとすると，各生産パターンに対応する利潤は

$$\pi(0, 0) = 0, \quad \pi(1, 1) = 10, \quad \pi(4, 2) = 16, \quad \pi(9, 3) = 18 \tag{11}$$

のように変わる．したがって，この企業によって選択される生産パターンは $(z^*, x^*) = (9, 3)$ となる．この例が端的に示すように，企業の生産パターンは生産物価格と生産要素価格に依存する．これは言い換えれば，企業によって選ばれる生産要素の投入量 z^* と生産物の産出量 x^* とが，いずれも価格ベクトル (w, p) の関数になるということである．生産要素の投入量 z^* を (w, p) の関数と見なしたものを，要素

需要関数（factor demand function）と呼ぶ．同様に，生産物の産出量 x^* を (w,p) の関数と見なしたものを供給関数（supply function）と呼ぶ．

2　生産関数と費用関数

消費者理論の主要な課題が需要関数を特徴付けることにあったように，生産者理論では，我々は要素需要関数と供給関数を特徴付けることになる．つまり，(9) で与えられる利潤最大化問題の解が，生産要素価格 w や生産物価格 p の値によってどのように変化するのかを検討することが，我々の次なる目的である．

この目的は，異なる二通りの方法によって達成することができる．いずれの方法も，企業の生産技術を「何らかの関数」によって表現することで，(9) の利潤最大化問題をより解き易い形に書き換えるものである．一つ目の方法では生産関数によって，二つ目の方法では費用関数によって，生産技術を表現することになる．生産関数は，「ある一定の生産要素を投入することでどれだけ多くの生産物を作ることができるか」という観点から生産者の技術を特徴付ける．一方の費用関数は，逆に「ある一定の生産物をどれだけ少ない費用で作ることができるか」という観点から生産技術を特徴付ける．

2.1　生産関数

前節で我々は，生産技術を生産集合と呼ばれる集合によって表現した．つまり，その技術の下で実現可能な生産パターンを列挙することで（これは実現不可能な生産パターンを列挙することでもある），生産技術を特徴付けるというやり方である．生産集合による生産技術の特徴付けは，生産者の意思決定をフォーマルに記述するための最も一般性の高い方法である．ただ多くの場合，生産技術は生産関数（production function）と呼ばれる関数によっても特徴付けることができる．

生産関数とは，生産要素の投入量 z に対して，それによって産出できる最大の生産量 $f(z)$ を対応させるような関数 f のことである．あるトマト農園の生産技術が生産関数 f によって表現されるとき，それは例えば，「労働時間を z' だけ投入すれば一年間に $f(z')$ だけのトマトを生産できるが，もう少し頑張って労働時間を $z'' > z'$ に増やすことで，トマトの年間生産量を $f(z'') > f(z')$ に増産することができる」とったことを意味する．

生産関数は，生産集合の関数表現の一つであると解釈してもよい．つまり，

$$(z,x) \in Y \iff x = f(z) \tag{12}$$

がどのような (z,x) についても成立する時，関数 f は生産集合 Y の関数表現であ

る，と言うことができる[3]．例えば，ある生産者の技術が (4) の生産集合 Y によって与えられているとする．ここで，Y 上で選択可能な生産要素の投入量を集めたものを $Z \subset \mathbb{R}_+$ で表わそう．すなわちこの例では

$$Z := \{0, 1, 4, 9\} \tag{16}$$

である．すると，この生産技術は

$$f(z) := z^{1/2} \quad \forall z \in Z \tag{17}$$

で定義される関数 $f : Z \to \mathbb{R}_+$ によっても特徴付けることができる．というのも，

$$(0, f(0)) = (0, 0), \quad (1, f(1)) = (1, 1), \quad (4, f(4)) = (4, 2), \quad (9, f(9)) = (9, 3)$$

がいずれも Y に含まれる（つまりは実現可能な生産パターンである）からである．あるいは，(5) の生産集合 $\tilde{Y}$ によって与えられる生産技術であれば，同様の手続きから

$$\tilde{f}(z) := 2z^{1/2} \quad \forall z \in Z \tag{18}$$

という別の関数 $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}_+$ で表現されることが確認できよう[4]．生産技術の違いは，生産集合の違いによっても表現することができるが，生産関数の違いによって表現することができるのである．

上の例では，話を簡単にするために，生産要素の投入量を $Z := \{0, 1, 4, 9\}$ の中からしか選択できないと仮定した．しかし現実には，もう少し柔軟に投入量を調整できると考えるべきであろう．労働者との交渉によって作業時間を 3 時間や 6 時間に調整するすることも可能であろうし，複数の労働者を雇用すれば，例えば一日に 36 時間分の労働を投入することもできるようになる．毎朝の手入れの時間を，1 時間と言わずに 1.5 時間という半端な時間に延長してもらうことも，あるいは無理な話ではない．したがって多くの場合，企業は生産要素の投入量を $Z := \mathbb{R}_+$ の中から自由に選択できると仮定される．そのような仮定の下での，典型的な生産関数の例を図 1 に示した．

---

[3]ちなみに (12) は

$$Y = \{(z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x = f(z) \text{ for some } z \in \mathbb{R}_+\} \tag{13}$$

と表現することもできる．なお，生産した財を費用をかけずに廃棄できるならば（つまりトマトを大量に捨てても誰からも怒られないのであれば），(12) は

$$(z, x) \in Y \iff x \leq f(z), \tag{14}$$

したがって (13) は

$$Y = \{(z, x) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x \leq f(z) \text{ for some } z \in Z\} \tag{15}$$

となる．

[4]全ての $z \in Z$ について $(z, \tilde{f}(z)) \in \tilde{Y}$ であることを確認してほしい．

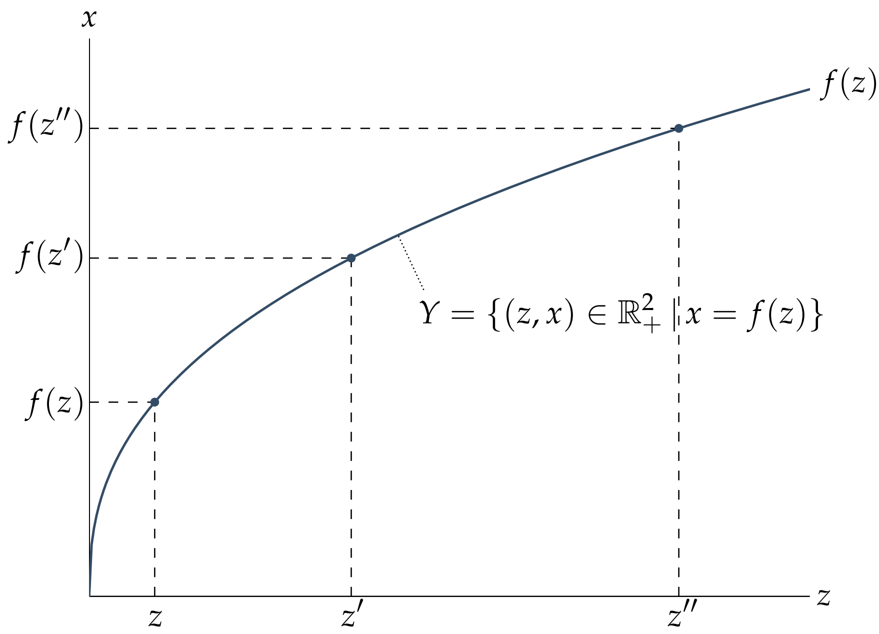

図 1: 生産技術の関数表現（生産関数）の例

生産関数を用いると，企業の利潤最大化問題 (9) を，次のように書き換えることができる．つまり，ある企業の生産技術が生産関数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ によって代表されている時，その企業は

$$z^* \in \underset{z \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \{pf(z) - wz\} \tag{19}$$

を満たす生産要素 z^* を投入して

$$x^* = f(z^*) \tag{20}$$

だけの財を生産する．この問題で企業が直接選ぶのは生産要素の投入量 z だけである．要素投入量 z は生産関数によって生産量 $x = f(z)$ と結び付けられているので，利潤を最大化する要素投入量 $z^* \in \mathbb{R}_+$ を探せば（つまりは (19) の最大化問題を解く z^* を見付ければ)，利潤を最大にする生産量 $x^* = f(z^*) \in \mathbb{R}_+$ も自ずと求まる．

2.2 費用関数

生産技術の関数表現は，費用関数（cost function）と呼ばれる関数によっても可能である．費用関数とは，生産物の産出量 x に対して，それだけの産出量を実現するために必要となる最小の費用 $c(x)$ を対応させるような関数 c のことである．あるトマト農園の生産技術が費用関数 c によって表現されるとき，それは例えば，「こ

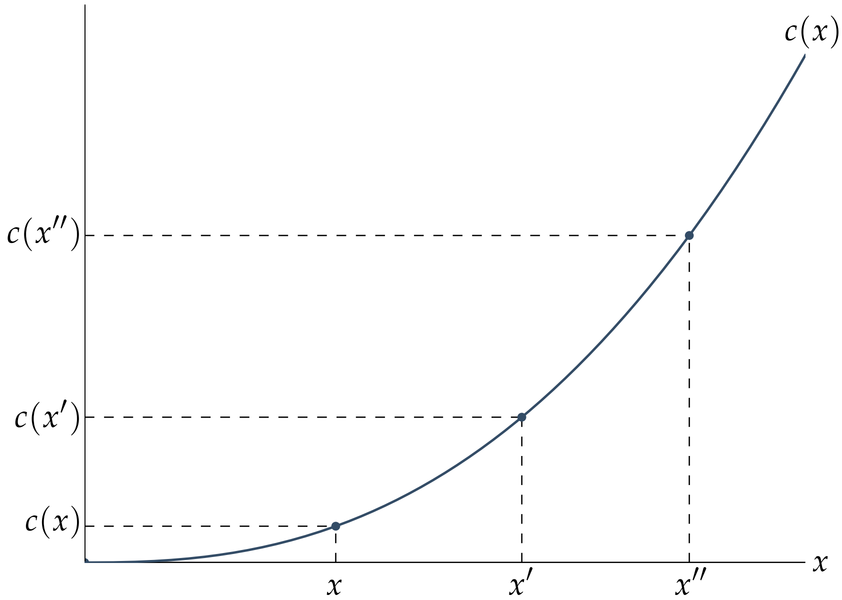

図 2: 生産技術の関数表現（費用関数）の例

の農園で x' だけのトマトを生産するためには最低でも $c(x')$ だけの費用が必要であり，さらに生産量を増やして $x'' > x'$ だけのトマトを作るとなると，そのための費用は $c(x'') > c(x')$ に増えてしまう」とったことを意味する．図 2 は，典型的な費用関数を図示したものである．

具体的な例として，ある生産者の技術が (4) の生産集合 Y によって与えられている場合を考えよう．ここで，Y 上で選択可能な生産物の産出量を集めたものを $X \subset \mathbb{R}_+$ で表わそう．すなわちこの例では

$$X := \{0, 1, 2, 3\} \tag{21}$$

である．するとこの生産技術は，要素価格を w として，

$$c(x) := wx^2 \quad \forall x \in X \tag{22}$$

で定義される関数 $c : X \to \mathbb{R}_+$ によっても特徴付けることができる．というのも，Y に含まれる選択肢を見ると，生産物を x だけ産出するためには $z = x^2$ だけの要素投入が必要であり，その時の費用は wx^2 となる，という関係が存在するからである．あるいは，(5) の生産集合 $\tilde{Y}$ によって与えられる生産技術であれば，

$$\tilde{c}(x) := \frac{w}{4}x^2 \quad \forall x \in X \tag{23}$$

という別の関数 $\tilde{c} : X \to \mathbb{R}_+$ で特徴付けることができよう（各々で確認してみる

とよい）．生産技術の違いは，費用関数の違いによっても表現することができる．

費用関数を用いると，企業の利潤最大化問題 (9) を次のように書き換えることができる．つまり，ある企業の生産技術が費用関数 $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ によって代表されている時，その企業は，

$$x^* \in \underset{x \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \{px - c(x)\} \tag{24}$$

を満たす x^* を生産し，そのために

$$z^* = c(x^*)/w \tag{25}$$

だけの生産要素を投入する．この問題で企業が直接選ぶのは生産量 x だけである．費用関数は生産量 x と費用 $c(x)$ とを結び付けるものであった．そして生産に $c(x)$ だけの費用がかかったということは，それはとりもなおさず，$z = c(x)/w$ だけの要素投入が必要であったことを意味する．したがって，利潤を最大化する生産量 $x^* \in \mathbb{R}_+$ を探すことができれば（つまり (24) の最大化問題を解く x^* を見付けられれば），利潤を最大にする要素投入量 $z^* = c(x^*)/w \in \mathbb{R}_+$ も自ずと求まるのである．

2.3 生産関数と費用関数との関係

企業の生産技術は，上で見たように，生産関数と費用関数という 2 つの異なる方法で特徴付けることができる．前者は「ある一定の生産要素を投入することでどれだけ多くの生産物を作ることができるか」という観点から，後者は「ある一定の生産物をどれだけ少ない費用で作ることができるか」という観点から，生産技術を特徴付けるものだった．当然ながら，2 つの方法の間には密接な関係がある[5]．

この点をより明確にするために，まずは生産関数から出発して，対応する費用関数を導出してみることにしよう．例えば，ある企業の生産技術が

$$f(z) = z^{1/3} \tag{26}$$

なる生産関数によって表現できるとする．つまりこの企業は，z だけの生産要素を投入することによって，$f(z) = z^{1/3}$ だけの生産物を産出することが可能である．たとえば，$z = 8$ 単位の生産要素を使うことで，$f(8) = 8^{1/3} = 2$ 単位の生産物を産出できるし，投入する生産要素の量を $z = 27$ 単位に増やせば，生産物の産出量を $f(27) = 27^{1/2} = 3$ 単位に増加させることもできる．これは逆に言えば，$x = 2$ 単位の生産物を産出するためには，$8 = 2^3$ 単位の生産要素を投入する必要があり

[5] ここでは生産要素がひとつしかないような単純なケースのみを扱っているが，生産関数と費用関数との関係は，生産要素の数が 2 つ以上である場合でも同様である．生産関数と費用関数は，企業の生産技術について（ほとんどの場合に）全く同じだけの情報を表現できる．

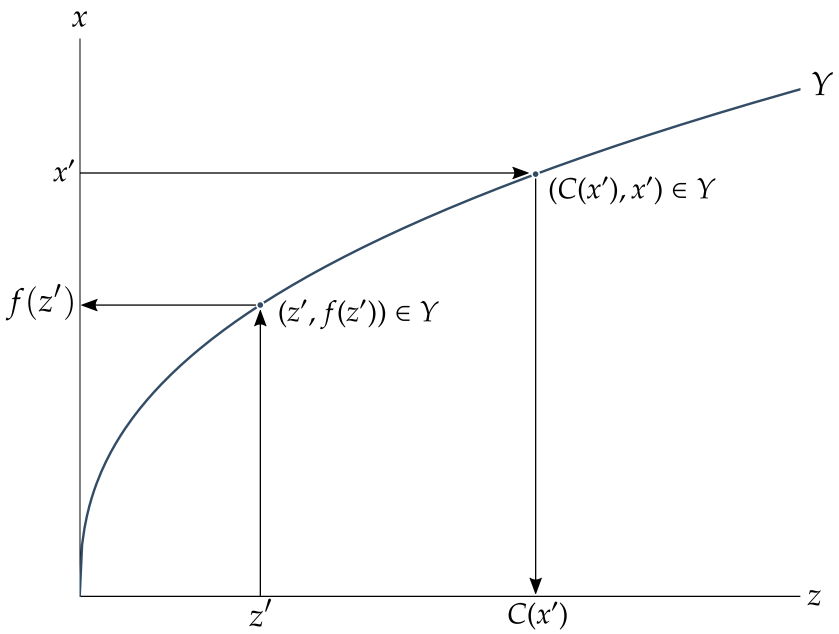

図 3: 生産関数 $f(z)$ とその逆関数 $C(x)$ との関係

（その時の費用は $w2^3$ である），生産物の産出量を $x = 3$ 単位に増やすためには，生産要素の投入量を $27 = 3^3$ 単位まで増加させる必要があるということである（その時の費用は $w3^3$ になる）．同様の手続きを他の生産量と生産要素投入量の組についても行うことで，この企業の生産技術を表現する費用関数は

$$c(x) = wx^3 \tag{27}$$

であることが分かる．ここで，(27) における x^3 が (26) における $z^{1/3}$ の逆関数になっていることに注意しよう．これは決して偶然ではない．一般に，ある企業の生産技術が生産関数 $f(z)$ によって与えられている時，$f(z)$ の逆関数を $C(x) := f^{-1}(x)$ として，

$$c(x) = wC(x) \tag{28}$$

がその企業の費用関数となる[6]．生産関数 $f(z)$ は「z' だけの生産要素から $f(z')$ という量の生産物を生み出せる（つまり $(z', f(z')) \in Y$）」という関係を表わしていたのだから，その逆関数 $C(x)$ を考えることで「x' という量の生産物を産出するためには $C(x')$ だけの生産要素が必要である（つまり $(C(x'), x') \in Y$）」という逆方向の関係を表わすことができるのである．この関係は，図 3 からも明らかであろう．

[6]関数 $f(z)$ の逆関数とは

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{29}$$

を満たすような関数 $f^{-1}(x)$ のことである．幾何的には，関数 $f(z)$ のグラフを 45 度線を境界にして折り返したもの（つまり，横軸と縦軸とを入れ替えたもの）が，逆関数 $f^{-1}(x)$ のグラフになる．

これとは反対に，企業の費用関数の出発して，その企業の生産関数を逆算することもできる．例えば，ある企業の生産技術が

$$c(x) = wx^{3/2} \tag{30}$$

なる費用関数によって表現されているとしよう．この企業は，x だけの生産物を作り出すために，$c(x) = wx^{3/2}$ だけの費用をかける必要がある．生産要素の単位価格は w であるから，$c(x) = wx^{3/2}$ だけの費用がかかるということは，それはすなわち，$c(x)/w = x^{3/2}$ だけの生産要素を投入する必要があるということに他ならない．このような「x 単位の生産物を生み出すために必要な生産要素の量」を $C(x)$ で表わすことにしよう．つまりこの例では，$C(x) := x^{3/2}$ である．この企業は，$x = 4$ 単位の生産物を産出するためには，$C(4) = 4^{3/2} = 8$ 単位の生産要素を投入しなければならず，生産物の量を $x = 9$ に増産するためには，$C(9) = 9^{3/2} = 27$ 単位の生産要素が必要となる．これは逆に言えば，$z = 8$ 単位の生産要素を投入することで，$4 = 8^{2/3}$ 単位の生産物を生み出すことができ，生産要素の投入量を $z = 27$ まで増やせば，生産物の産出量を $9 = 27^{2/3}$ 単位まで増加させることができるということである．同様の手続きを他の生産量と生産要素投入量の組についても行うことで，この企業の生産技術を表現する生産関数は

$$f(z) = z^{2/3} \tag{31}$$

であることが分かる．ここで，(31) における $z^{2/3}$ が，(30) における $x^{3/2}$ の逆関数になっていることに注意しよう．やはりこれも偶然ではなく，一般に，ある企業の生産技術が費用関数 $c(x)$ によって与えられている時，$C(x) := c(x)/w$ の逆関数がその企業の生産関数となる．

3　供給関数と要素需要関数の導出

それでは，具体的な利潤最大化問題を考えながら，供給関数と要素需要関数を実際に求めてみよう．

3.1　供給関数と要素需要関数

ある企業の生産技術が，生産関数

$$f(z) := z^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{32}$$

によって表現されているとする．生産要素価格を w，生産物価格を p と表記しよう．するとこの企業は

$$z^* \in \underset{z\in\mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}}\{pf(z) - wz\} \tag{33}$$

を満たすような z^* を，生産要素の投入量として選択する．(33) は 1 変数関数の最大化問題であるから，z^* がこの問題の解であるならば

$$(pf(z) - wz)'\,|_{z=z^*} = 0 \iff pf'(z^*) = w \tag{34}$$

が成立するはずである．いま生産関数は (32) で与えられていたから，これはさらに

$$pf'(z^*) = w \iff \frac{p(z^*)^{-1/2}}{2} = w \iff z^* = \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{35}$$

のように書き換えられる．また，生産要素を z^* だけ投入した時の生産量は $x^* = f(z^*)$ であるから，(35) で求めた z^* を (32) に代入することで，

$$x^* = f(z^*) = (z^*)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{36}$$

を得る．したがって，この企業の利潤を最大化する生産パターンは

$$(z^*, x^*) = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \frac{1}{2}\frac{p}{w}\right) \tag{37}$$

である．

いま求めた (z^*, x^*) が，(w, p) の値によって変化することに注意しよう．つまり，既に予告していた通り，要素需要関数と供給関数はいずれも価格ベクトルの関数になる．このことをより明示的に表現するために，要素需要関数と供給関数を，それぞれ

$$z^d(w,p), \quad x^s(w,p) \tag{38}$$

のように書く．上の例では

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{39}$$

である．生産要素の価格 w が上昇すれば，生産要素の投入量 $z^d(w,p)$（つまり生産要素に対する需要量である）が減少し，結果として生産物の産出量 $x^s(w,p)$（つまり生産物の供給量）も減少する．一方，生産物の価格 p が上昇した場合には，利潤を最大にするような生産物の産出量 $x^s(w,p)$ は増加し，そのために投入される生産要素の量 $z^d(w,p)$ も増えることになる．

同じ問題を，今度は費用関数を用いて解いてみよう．ある企業の生産技術が，

費用関数

$$c(x) := wx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{40}$$

によって表現されているとする．この (40) で定義される費用関数 c は，(32) で定義される生産関数 f と同一の生産技術を表現するものである[7]．この企業の利潤を最大にする生産量は，

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x \in \mathbb{R}_+} \{px - c(x)\} \tag{41}$$

を満たす x^* である．(41) は 1 変数関数の最大化問題であるから，x^* がこの問題の解であるならば

$$(px - c(x))'\,|_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{42}$$

が成立するはずである．いま費用関数は (40) で与えられていたから，これはさらに

$$p = c'(x^*) \iff p = 2wx^* \iff x^* = \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{43}$$

のように書き換えられる．また，$c(x^*)$ だけの費用がかかった場合の要素投入量は $z^* = c(x^*)/w$ であるから，ここに (43) で求めた x^* を代入して

$$z^* = \frac{c(x^*)}{w} = \frac{w(x^*)^2}{w} = \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{44}$$

を得る．よって，この企業の利潤を最大化する生産パターンは，やはり

$$(z^*, x^*) = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \frac{1}{2}\frac{p}{w}\right) \tag{45}$$

であり，したがって要素需要関数と供給関数は，それぞれ

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{46}$$

のように求められる．

もう一つ例を挙げよう．ある企業の生産技術が，生産関数

$$f(z) := z^{1/3} \quad \forall z \in \mathbb{R}_+ \tag{47}$$

によって表現されているケースを考える．関数 $f(z)$ の逆関数は $C(x) = x^3$ である

[7] (32) で定義される生産関数 f の逆関数は $C(x) = x^2$ であるから，対応する費用関数は $wC(x) = wx^2$ となる．つまり，この企業が x だけの生産物を作ろうとすれば，$C(x) = x^2$ だけの生産要素を投入する必要があり，それだけの要素を投入するためには $wC(x) = wx^2$ だけの費用がかかる．

から，この企業の生産技術を費用関数で表現するならば

$$c(x) := wC(x) = wx^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{48}$$

となろう．この企業が x だけの生産物を作ろうとすれば $C(x) = x^3$ だけの生産要素を投入する必要があり，それだけの要素を投入するためには wx^3 だけの費用がかかるからである．

この企業の要素需要関数と供給関数を，まずは生産関数を用いて導出してみよう．先程の例と同様にして，利潤最大化問題は

$$z^* \in \underset{z \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \{pf(z) - wz\} \tag{49}$$

のように書くことができるから，z^* がこの問題の解であるならば

$$(pf(z) - wz)' \,|_{z=z^*} = 0 \iff pf'(z^*) = w \tag{50}$$

を見たすはずである．いま生産関数は (47) で与えられていたから，これはさらに

$$pf'(z^*) = w \iff \frac{p(z^*)^{-2/3}}{3} = w \iff z^* = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{51}$$

のように書き換えられ，この z^* が利潤を最大化する要素投入量である．また，生産要素を z^* だけ投入した時の生産量は $x^* = f(z^*)$ であるから，(51) で求めた z^* を (47) に代入することで，

$$x^* = f(z^*) = (z^*)^{1/3} = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{52}$$

のように，利潤を最大化する生産量 x^* を得る．したがって，この企業の要素需要関数と供給関数は

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{53}$$

である．

生産関数の代わりに費用関数を用いても，要素需要関数と供給関数を同様に求めることができる．費用関数を用いた場合，この企業の利潤最大化問題は

$$x^* \in \underset{x \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{argmax}} \{px - c(x)\} \tag{54}$$

のように書くことができるから，x^* がこの問題の解であるならば

$$(px - c(x))'|_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{55}$$

が成立するはずである．いま費用関数は (48) で与えられていたから，これはさらに

$$p = c'(x^*) \iff p = 3w(x^*)^2 \iff x^* = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{56}$$

のように書き換えられ，この x^* が利潤を最大化する生産量である．また，$c(x^*)$ だけの費用がかかった場合の要素投入量は $z^* = c(x^*)/w$ であるから，(56) で求めた x^* を代入して

$$z^* = \frac{c(x^*)}{w} = \frac{w(x^*)^3}{w} = \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{57}$$

として，利潤を最大化する要素投入量 z^* を得る．したがって要素需要関数と供給関数は，やはりそれぞれ

$$z^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{58}$$

のように求められる．

3.2 限界費用関数と供給関数

経済学では，費用関数の微分係数のことを限界費用（marginal cost）と呼ぶ．限界費用とは，大雑把に言えば，「もう一単位追加的に財を生産するために必要となる費用」のことである[8]．一般に，限界費用 $c'(x)$ は x の値によって異なったものになる．トマトの生産量を 2 トンから 3 トンに増やすための費用は，おそらく 3 トンから 4 トンに増やすための費用と同じではない．生産量 x に応じて，そこからもう一単位追加的に増産することの費用 $c'(x)$ は変わってくる（図 4）．これはつまり，限界費用 $c'(x)$ は x の関数になるということである．そして，この「限界費用 $c'(x)$ を x の関数と見なしたもの」を限界費用関数（marginal cost function）と呼ぶ（図 5）．

限界費用関数 $c'(x)$ は，供給関数 $x^s(w,p)$ と密接に関係している．というより，限界費用関数は供給関数そのものである．このことを理解するために，費用関数を用いた場合の利潤最大化問題を再び考えよう．上記の例の中で既に述べた通り，利潤を最大化する生産量 x^* は

$$(px - c(x))'|_{x=x^*} = 0 \tag{59}$$

[8] 関数の微分係数が「変数を少しだけ変化させたときにそれに応じて関数の値が変化する勢い」を意味するものであったことを思い出そう．

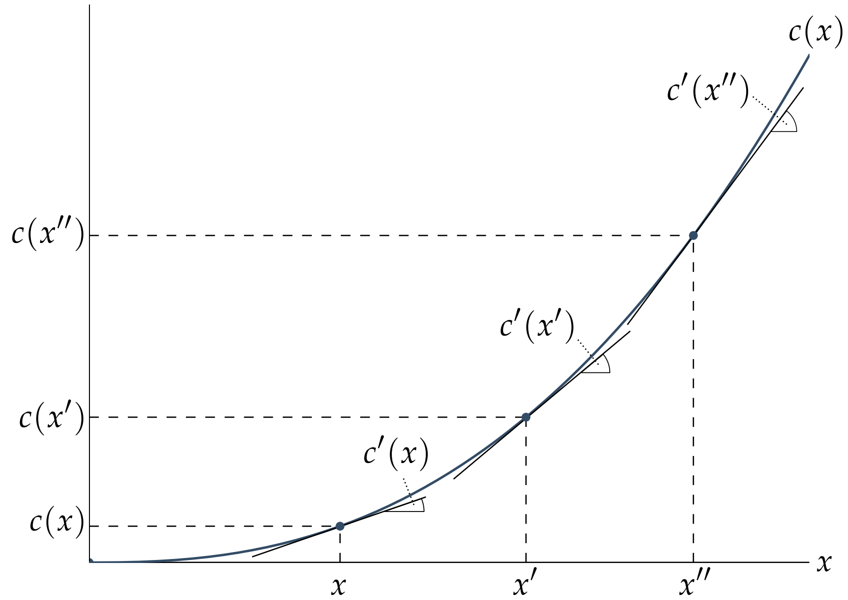

図 4: 費用関数と限界費用

したがって

$$c'(x^*) = p \tag{60}$$

を満たす．つまり利潤最大化問題の解 x^*（それはすなわち供給関数 $x^s(w,p)$ である）は，「限界費用が価格に等しくなるように」決定される．ここで，この関係が価格 p の値によらず常に妥当する，ということに注意しよう[9]．例えば財の価格が p から $p' > p$ に上昇すれば，それに応じて供給量も調整されることになるが，その場合にも，上昇した価格 p' に限界費用 $c'(x^*)$ が一致するように x^* が調整されることになる（その調整された x^* の値が $x^s(w,p')$ である）．財の価格がさらに $p'' > p'$ まで上昇した場合にも，やはり上昇した価格 p'' に限界費用 $c'(x^*)$ が一致するように供給量 x^* が調整される（その調整された x^* の値が $x^s(w,p'')$ である）．このような関係は，図 5 からも明らかであろう．価格 p と供給量 $x^s(w,p)$ との関係は，限界費用関数 $c'(x)$ によって完全に特徴付けられるのである．

典型的な供給関数を図 6 に示した．幾何的には，限界費用関数を 45 度線で折り返したものが供給関数となる（例えば図 5 の縦軸と横軸とを入れ替えれば図 6 を得る）．これは言い換えれば，限界費用関数は供給関数の逆関数（したがって供給関数は限界費用関数の逆関数）に他ならず，限界費用関数が供給関数そのものであるというのはこのような意味においてである．

[9] より現実的な生産技術を仮定すれば，価格が十分に低くなると生産が全く行われなくなると考えられるため，この表現は必ずしも正確ではない．価格が低い場合に生産が行われなくなるのは，固定費用や分業の利益等の存在による．企業の参入などが起こる「長期の問題」を考える際には，このようなより現実的な生産技術が重要な役割を果たすが，この講義で扱う単純なケースにおいては (60) の関係が常に成立すると考えて良い．

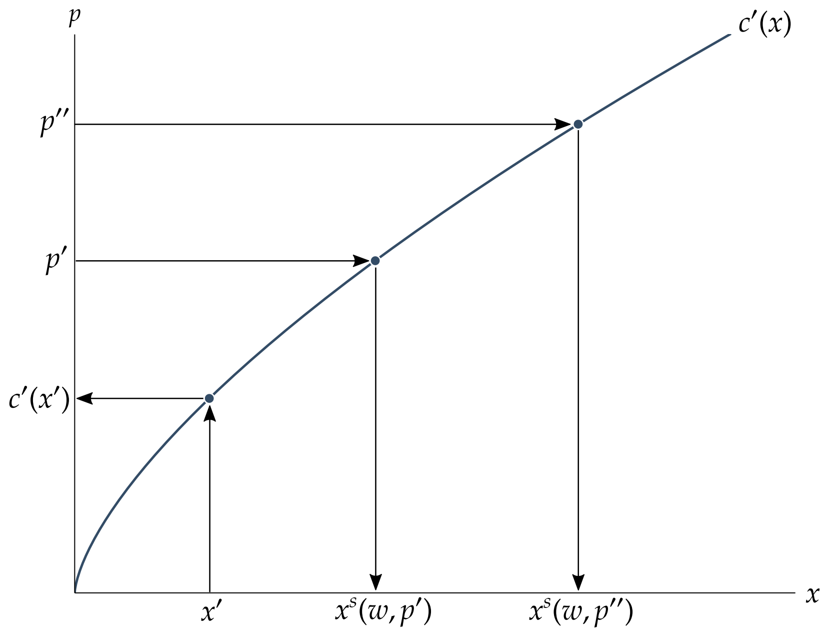

図 5: 限界費用関数と供給関数

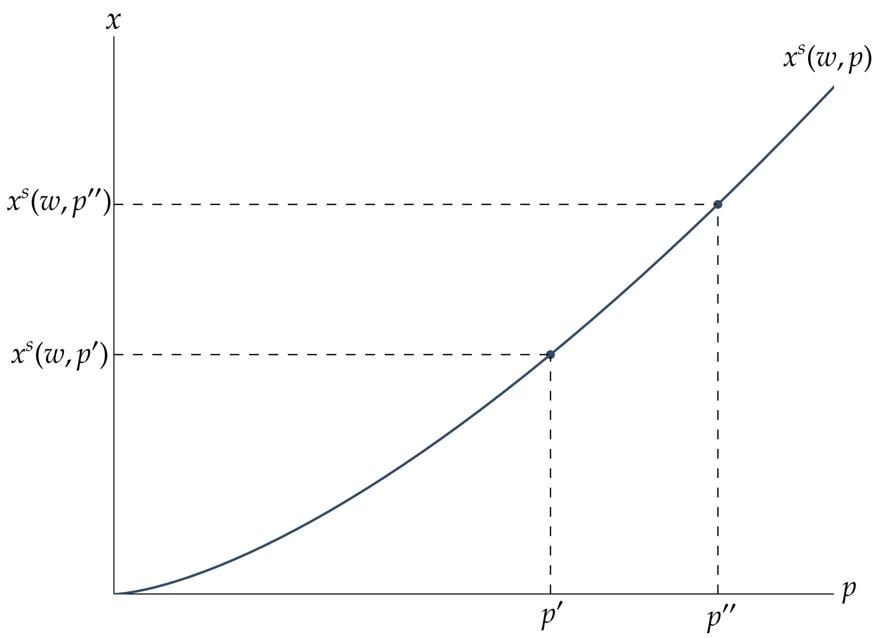

図 6: 供給関数

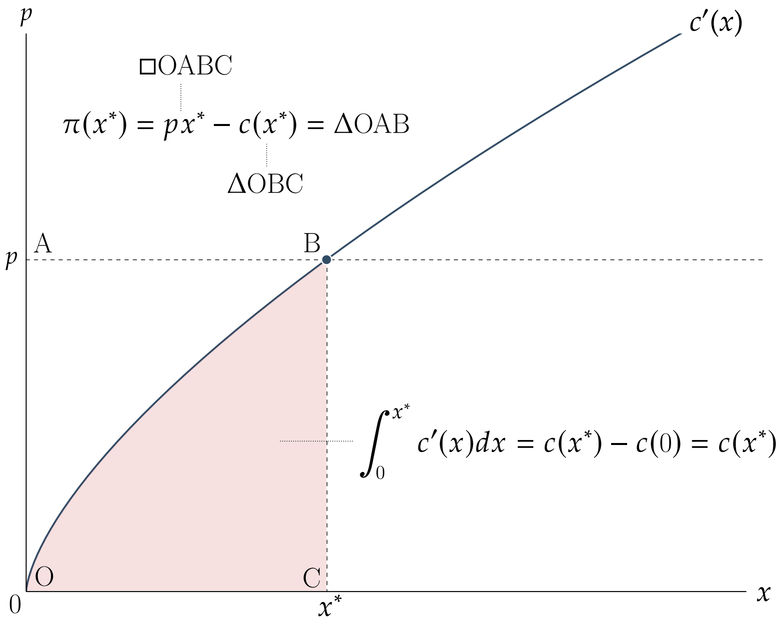

図 7: 利潤の最大化

3.3 幾何的な説明

前節で見た「企業は限界費用が価格に等しくなるように生産量を選ぶ」という結果は，簡単な図を用いて説明することもできる．具体的な例として，企業の限界費用関数 $c'(x)$ のグラフが図 7 のような形で与えられてい場合を考えよう．この企業は，例えば価格が p であれば $p = c'(x^*)$ を満たすように生産量 x^* を選ぶ．この時の収益は px^* であるから，図 7 の中で表現するならば，それはの四角形 OABC の面積に相当する．一方の費用 $c(x^*)$ は，図の中で示したように，三角形 OBC の面積で表わされる．したがって，四角形 OABC の面積から三角形 OBC の面積を減じた残り，すなわち三角形 OAB の面積が企業の利潤である．

ここで仮に，x^* よりも低い水準（例えば図 8 の $x' < x^*$ のような）で生産を行った場合に利潤がどのように変化するか考えてみよう．この時の収益は px' であるから，図 8 の四角形 OAB'C' の面積に相当する．一方の費用 $c(x')$ は三角形 OD'C' の面積で表わされるから，x' 単位の財を生産した場合の企業の利潤は四角形 OAB'D' の面積になる．これは明らかに，x^* 単位の財を生産した場合の利潤（三角形 OAB の面積）よりも小さい．逆に，x^* よりも多くの財（例えば図 9 の $x'' > x^*$ のような）を生産した場合はどうであろうか．この時の収益は px'' であるから，図 9 の四角形 OAB"C" の面積となる．しかし費用 $c(x'')$ も三角形 OD"C" の面積まで拡大し，結果として x'' 単位の財を生産した場合の利潤は三角形 OAB の面積から三角形 D"B"B の面積を減じたもの（当然ながらそれは三角形 OAB の面積よりも小さい）になる．したがって，x^* の水準で生産を行うことがこの企業の利潤を最大化することになるのである．

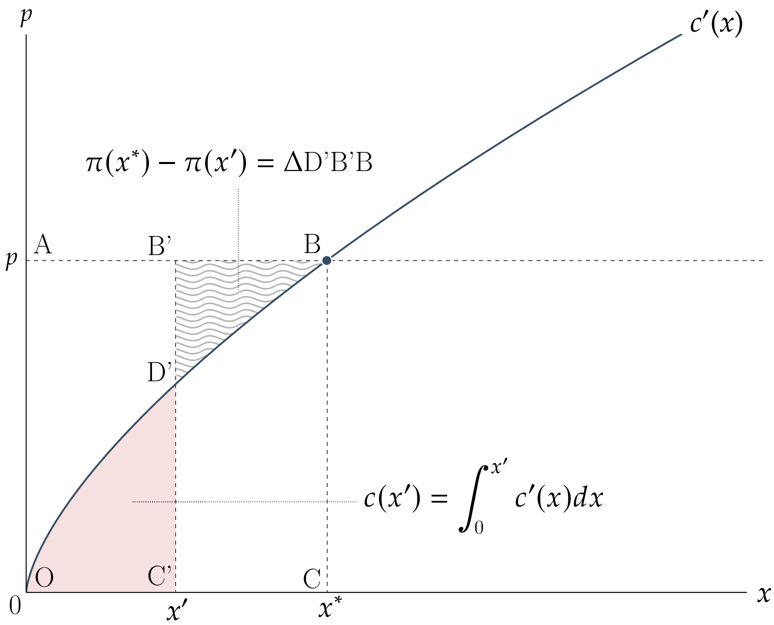

図 8: 過少生産（$x' < x^*$）による利潤の減少

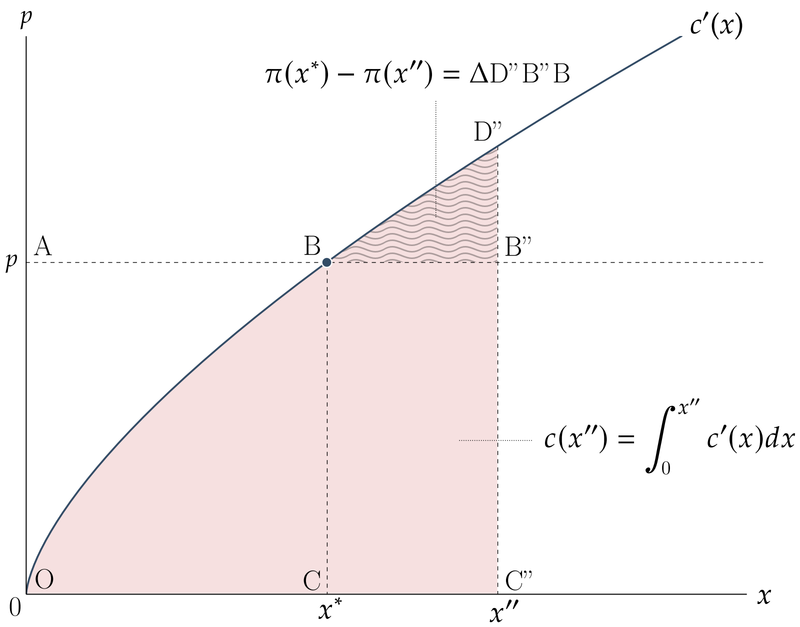

図 9: 過剰生産（$x'' > x^*$）による利潤の減少

4 集計

ここで関心の範囲を少し広げて，経済全体に目を向けることにしよう．ある経済に，合計で $J \in \mathbb{N}$ 個の企業が存在する場合を考える．企業の数は $J = 10$ でも $J = 1000000$ でも構わない．さしあたって我々は，この経済には消費できる物理的な財が一つしか存在しないと考え，いずれの企業も労働を用いてその財を生産しているものと仮定しよう．これは話を簡単にするための方便であり，原理的には財の数はいくつあってもよい．

経済に存在する企業を $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ という番号で識別し，その生産技術を費用関数 $c_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ によって表現する．このとき，それぞれの企業は

$$x_j^* \in \operatorname*{argmax}_{x_j \in \mathbb{R}_+} \{px_j - c_j(x_j)\} \tag{61}$$

を満たす x_j^* を生産・供給し，そのために

$$z_j^* = c_j(x_j^*)/w \tag{62}$$

だけの生産要素（労働時間）を投入・需要する．財の供給量 x_j^* や労働の需要量 z_j^* が (w, p) の関数であることを明示して，それぞれを関数の形で，つまりは $x_j^s(w, p)$ や $z_j^d(w, p)$ のように書くことにする．

4.1 財供給の集計

財 x の市場を考えた場合，市場全体で集計した供給は

$$X^s(w, p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w, p) \tag{63}$$

のように表現できる．X^s は (w, p) の関数であり，これを集計供給関数（aggregate supply function）と呼ぶ．集計供給関数は，財の価格等の変化に応じて市場全体の供給がどのように反応するのかを記述したものである．

具体的な例を挙げよう．企業 j の生産技術が，費用関数

$$c_j(x) := wx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{64}$$

によって表現されているとする[10]．すると前節の議論から，企業 j の要素需要関

[10] この費用関数は j に依存しないので，この例では全ての企業が同一の生産技術を持つようなケースを考えていることになる．これも説明のための便宜であり，分析の一般性を損うものではない．原理的には，生産技術は企業によって異なっても構わない．

数と供給関数は，それぞれ

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2, \quad x_j^s(w,p) := \frac{1}{2}\frac{p}{w} \tag{65}$$

のように求められる．したがって，この時の集計供給関数は

$$X^s(w,p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w,p) = \frac{J}{2}\frac{p}{w} \tag{66}$$

である．

別の例として，企業の費用関数が

$$c_j(x) := wx^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{67}$$

によって与えられているようなケースを考えてみよう．すると，再び前節の議論から，企業 j の要素需要関数と供給関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2}, \quad x_j^s(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{68}$$

のように導出できる．したがって，この場合の集計供給関数は

$$X^s(w,p) := \sum_{j=1}^{J} x_j^s(w,p) = J\left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{1/2} \tag{69}$$

である．

4.2 逆集計供給関数

とくに集計的な供給を扱うとき，経済学ではしばしば逆集計供給関数（inverse aggregate supply function）というものを考える．逆集計供給関数とは，市場における供給と価格との関係を逆さに見たものである．集計供給関数は「価格が p の時には市場全体で $X^s(w,p)$ だけの財が供給される」という関係を表わすものであった．一方，逆集計供給関数とは，「市場全体で X だけの財が供給されるためには，価格は $p^s(X)$ でなければならない」という逆の関係を表現する．幾何的に言えば，集計供給関数 $X^s(w,p)$ のグラフを 45 度線で折り返したもの（これは個別の企業の限界費用曲線を横方向に積み上げたものに一致する）が，逆集計供給関数 $p^s(X)$ のグラフである（図 10 および図 11）．より正確には，逆集計供給関数とは集計供給関数 $X^s(w,p)$ の（それを p の関数と見た時の）逆関数のことである．

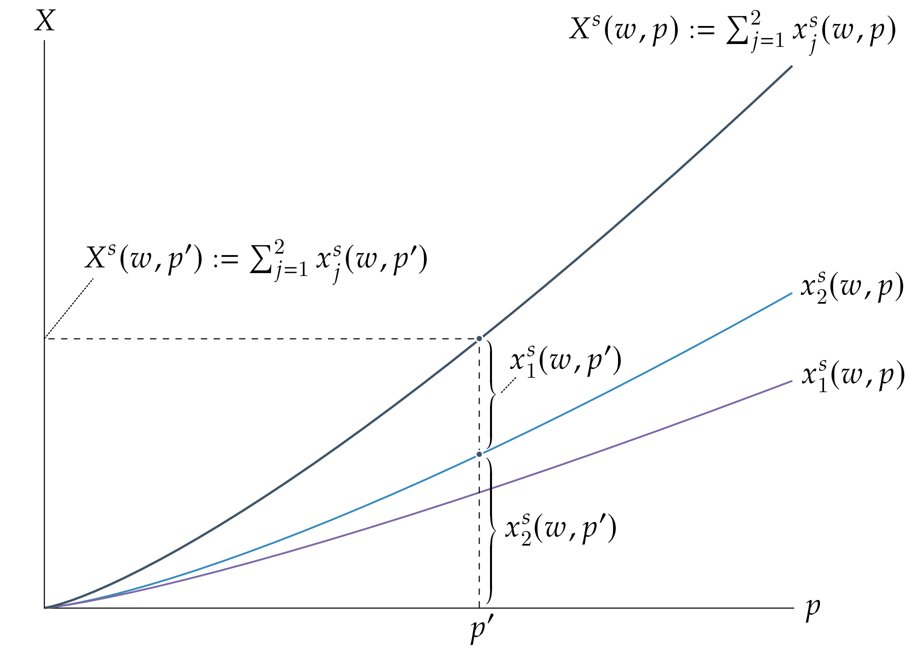

図 10: 集計供給関数（企業の数が $J=2$ のケース）

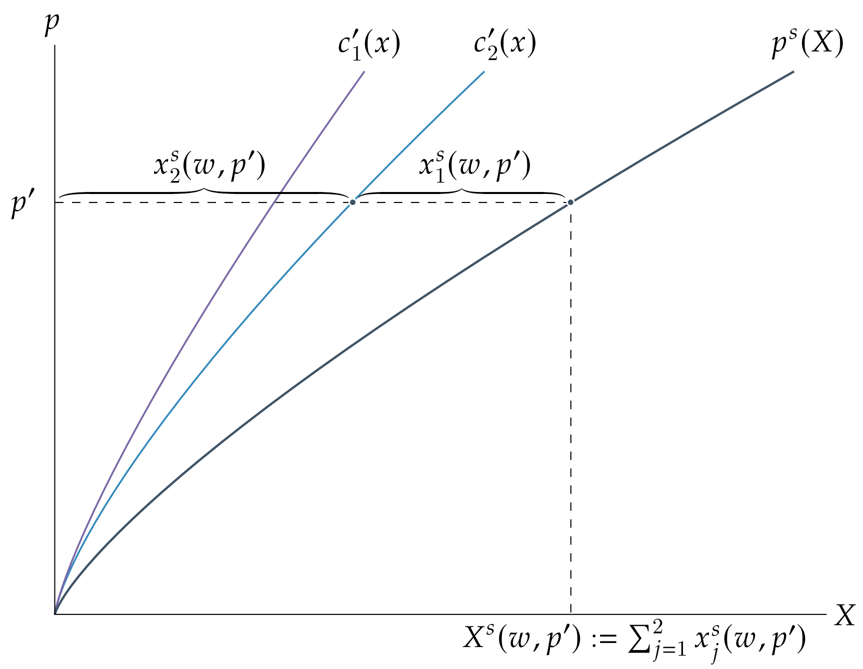

図 11: （集計）逆供給関数（企業の数が $J=2$ のケース）

4.3 労働需要の集計

企業によって需要される労働時間についても，市場全体での集計値を考えることができる．つまり，それぞれの企業が $z_j^d(w,p)$ だけの労働時間を投入・需要するのであるから，労働市場全体では

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) \tag{70}$$

だけの労働時間が需要されることになる．Z^d は (w,p) の関数であり，これを集計労働需要関数（aggregate labor demand function）と呼ぶ．集計労働需要関数は，賃金率等の変化に応じて労働市場全体の需要量がどのように反応するのかを記述したものである．

やはり具体的な例を挙げておく．企業 j の生産技術が，(64) で定義される費用関数によって表現されているとしよう．前節の議論から，この時の企業 j の労働需要関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{71}$$

であることが分かっている．したがって，集計労働需要関数は

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) = J\left(\frac{1}{2}\frac{p}{w}\right)^2 \tag{72}$$

である．

別の例として，企業の費用関数が (67) で定義される費用関数によって与えられているようなケースを考えてみよう．再び前節の議論から，企業 j の労働需要関数は

$$z_j^d(w,p) := \left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{73}$$

である．よって，この場合の集計労働需要関数は

$$Z^d(w,p) := \sum_{j=1}^{J} z_j^d(w,p) = J\left(\frac{1}{3}\frac{p}{w}\right)^{3/2} \tag{74}$$

となる．

A　補論： 複数の生産要素を投入する場合

本文中では，1 種類の生産要素（労働）のみを投入して財を生産する企業を考えた．しかし現実には，企業は様々な生産要素を組み合わせて財を生産することが多い．そこでこの補論では，複数の生産要素から財を生産する企業を考え，そのような企業の意思決定モデルを記述する．

A.1　生産技術と生産者の意思決定

本文と同様にトマトを栽培する企業を考えよう．この企業は「一般職」と「専門職」という二種類の労働者を雇用する．つまり，日常的に畑の手入れをする「一般職」という生産要素と，専門知識に基づいて栽培方法を研究する「専門職」という別の生産要素を組み合わせることで，この企業はトマトという財を生産する．一般職として雇用される人の労働時間を z_L，専門職の労働時間を z_H，生産するトマトの量を x と書こう．話を具体的にするために，一般職として雇った労働者達に皆で毎日 $z_L = 27$ 時間分だけ働いてもらい，専門職として雇った労働者達に皆で $z_H = 8$ 時間分だけ働いてもらうと，年間で $x = 6$ トンのトマトを生産することができるとしよう．もちろん別の生産パターンも可能で，例えば一般職の労働時間を $z_L = 64$ 時間に増やし，専門職の労働時間を $z_H = 27$ 時間にすれば，年間生産量を $x = 12$ トンまで増産することができる．あるいは逆に，一般職の労働時間を $z_L = 8$ 時間に削減し，専門職に $z_H = 1$ 時間働いてもらうだけで，$x = 2$ トンの生産を維持することができるという．もちろん，労働者を雇わなければ（つまり $z_L = z_H = 0$ ならば）生産できるトマトの量は $x = 0$ トンである．このとき，この企業が選ぶことができる (z_L, z_H, x) の組を並べあげると，

$$Y := \{(0,0,0), (8,1,2), (27,8,6), (64,27,12)\} \subset \mathbb{R}^3_+ \tag{75}$$

である．このように「実現可能な生産パターンを全て列挙することによって生産者の技術を表現したもの」のことを生産集合と呼ぶのであった．

一般職の賃金率を w_L，専門職の賃金率を w_H，生産物の単位価格を p と書こう．すると，この企業が (z_L, z_H, x) という生産パターンを選んだ場合の利潤を

$$\pi(z_L, z_H, x) := \underbrace{px}_{\text{収益}} - \underbrace{(w_L z_L + w_H z_H)}_{\text{費用}}$$

のように表現することができる．この企業の目的が利潤を最大化することだとすると，意思決定のモデルは次のように表現できるだろう．つまり，$Y \subset \mathbb{R}^3_+$ という生産集合を持つ企業は

$$\pi(z_L^*, z_H^*, x^*) \geq \pi(z_L, z_H, x) \quad \forall (z_L, z_H, x) \in Y \tag{76}$$

あるいは

$$(z_L^*, z_H^*, x^*) \in \operatorname*{argmax}_{(z_L, z_H, x) \in Y} \pi(z_L, z_H, x) \tag{77}$$

を満たすような $(z_L^*, z_H^*, x^*) \in Y$ を選ぶ．明らかに，このような利潤最大化問題の解は生産要素価格 w_L, w_H や生産物価格 p によって変わってくる．例えば，生産集合 Y が (75) で与えられているとして，生産要素価格と生産物価格が $(w_L, w_H, p) = (16, 54, 216)$ であれば，

$$\pi(0,0,0) = 0, \quad \pi(8,1,2) = 250, \quad \pi(27,8,6) = 432, \quad \pi(64,27,12) = 110$$

と計算できるから，利潤最大化問題の解は $(z_L^*, z_H^*, x^*) = (27, 8, 6)$ である．一方，価格ベクトルが $(w_L, w_H, p) = (2, 16, 24)$ に変化したとすると，各生産パターンに対応する利潤は

$$\pi(0,0,0) = 0, \quad \pi(8,1,2) = 16, \quad \pi(27,8,6) = -38, \quad \pi(64,27,12) = -272$$

のように変わるから，この企業によって選択される生産パターンは $(z_L^*, z_H^*, x^*) = (8, 1, 2)$ となる．この例が端的に示すように，企業によって選ばれる生産要素の投入量 z_L^*, z_H^* と生産物の産出量 x^* とは，いずれも価格ベクトル (w_L, w_H, p) の関数になる．生産要素の投入量 z_L^*, z_H^* を (w_L, w_H, p) の関数と見なしたものを要素需要関数，生産物の産出量 x^* を (w_L, w_H, p) の関数と見なしたものを供給関数と呼ぶ．

A.2　生産関数を用いた表現

企業の生産技術は，(75) のような生産集合の代わりに，生産関数と呼ばれる関数によっても特徴付けることができる．生産関数とは，生産要素の投入量 (z_L, z_H) に対して，それによって産出できる最大の生産量 $f(z_L, z_H)$ を対応させるような関数 f のことである．例えば，「一般職と専門職の労働時間を (z'_L, z'_H) だけ投入すれば一年間に $f(z'_L, z'_H)$ だけのトマトを生産できるが，労働時間の組み合わせを (z''_L, z''_H) にすれば，トマトの年間生産量を $f(z''_L, z''_H) > f(z'_L, z'_H)$ に増産すことができる」とった具合である．

生産関数は，生産集合の関数表現の一つであると解釈してもよい．つまり，

$$(z_L, z_H, x) \in Y \iff x = f(z_L, z_H) \tag{78}$$

がどのような (z_L, z_H, x) についても成立する時，関数 f は生産集合 Y の関数表現である，と言うことができる．例えば，ある生産者の技術が (75) の生産集合 Y によって与えられているとする．ここで，Y 上で選択可能な生産要素の投入量の組

(z_L, z_H) を集めたものを $Z \subset \mathbb{R}^2_+$ で表わそう．すなわちこの例では

$$Z := \{(0,0), (8,1), (27,8), (64,27)\} \tag{79}$$

である．すると，この生産技術は

$$f(z_L, z_H) := z_L^{1/3} z_H^{1/3} \quad \forall (z_L, z_H) \in Z \tag{80}$$

で定義される関数 $f : Z \to \mathbb{R}_+$ によっても特徴付けることができる．というのも，

$$(z_L, z_H, f(z_L, z_H)) \in Y \tag{81}$$

がいずれの $(z_L, z_H) \in Z$ についても成り立つ（つまりは実現可能な生産パターンを表す）からである．上の例では，話を簡単にするために，生産要素の投入量を $Z := \{(0,0), (8,1), (27,8), (64,27)\}$ の中からしか選択できないと考えた．しかし，現実にはもっと柔軟に各生産要素の投入量を調整できるはずであろうから，多くの場合，企業は生産要素の投入量を $Z := \mathbb{R}^2_+$ の中から自由に選択できると仮定される．

生産関数を用いると，企業の利潤最大化問題 (77) を「解きやすい形」に書き換えることができる．つまり，ある企業の生産技術が生産関数 $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ によって代表されている時，利潤は

$$\pi(z_L, z_H) := pf(z_L, z_H) - w_L z_L - w_H z_H$$

のように表せるから，この企業は

$$(z_L^*, z_H^*) \in \operatorname*{argmax}_{(z_L, z_H) \in \mathbb{R}^2_+} \pi(z_L, z_H) \tag{82}$$

を満たす生産要素ベクトル (z_L^*, z_H^*) を投入して

$$x^* = f(z_L^*, z_H^*) \tag{83}$$

だけの財を生産する．(77) は生産量も含めた生産パターン (z_L, z_H, x) を選択する問題であったが，(82) で企業が直接選ぶのは生産要素の投入量 (z_L, z_H) だけであることに注意しよう．これは，生産関数によって要素投入量が生産量 $x = f(z_L, z_H)$ と結び付けられているので，利潤を最大化する要素投入量 $(z_L^*, z_H^*) \in \mathbb{R}^2_+$ を探せば，利潤を最大にする生産量 $x^* = f(z_L^*, z_H^*) \in \mathbb{R}_+$ も自ずと求まるからである．

(82) は 2 変数関数の（制約なし）最大化問題であるから，この問題の解を特徴付けるのは容易である．つまり，(z_L^*, z_H^*) が (82) の解であれば，数学補論の定理 2

から，

$$\pi_1(z_L^*, z_H^*) = 0 \iff pf_1(z_L^*, z_H^*) = w_L$$

$$\pi_2(z_L^*, z_H^*) = 0 \iff pf_2(z_L^*, z_H^*) = w_H$$

という 2 つの方程式を同時に満たすはずである．したがって，これらの方程式を連立させて (z_L^*, z_H^*) について解けばよい．具体例を挙げよう．企業の生産関数が (80) で与えられているとする．この企業の利潤最大化問題 (82) の解を (z_L^*, z_H^*) と置くと，

$$\begin{aligned}\pi_1(z_L^*, z_H^*) = 0 &\iff pf_1(z_L^*, z_H^*) = w_L \\ &\iff p\frac{1}{3}\left(z_L^*\right)^{-2/3}\left(z_H^*\right)^{1/3} = w_L\end{aligned} \tag{84}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_2(z_L^*, z_H^*) = 0 &\iff pf_2(z_L^*, z_H^*) = w_H \\ &\iff p\frac{1}{3}\left(z_L^*\right)^{1/3}\left(z_H^*\right)^{-2/3} = w_H\end{aligned} \tag{85}$$

が同時に成り立っているはずである．(84) の各辺を (85) の各辺で割れば，

$$\frac{\left(z_L^*\right)^{-2/3}\left(z_H^*\right)^{1/3}}{\left(z_L^*\right)^{1/3}\left(z_H^*\right)^{-2/3}} = \frac{w_L}{w_H} \iff z_H^* = \frac{w_L}{w_H} z_L^* \tag{86}$$

となるから，これを例えば (85) に代入して

$$p\frac{1}{3}\left(z_L^*\right)^{1/3}\left(\frac{w_L}{w_H} z_L^*\right)^{-2/3} = w_H \iff z_L^* = \frac{p^3}{27w_L^2 w_H}$$

のように z_L^* が求まる．さらに今求めた z_L^* を (86) に代入すれば

$$z_H^* = \frac{w_L}{w_H}\frac{p^3}{27w_L^2 w_H} \iff z_H^* = \frac{p^3}{27w_L w_H^2}$$

のように z_H^* も求まる．よって，この企業の利潤を最大化する労働投入ベクトルは

$$(z_L^*, z_H^*) = \left(\frac{p^3}{27w_L^2 w_H}, \frac{p^3}{27w_L w_H^2}\right) \tag{87}$$

である．また，利潤を最大化する生産量は

$$
\begin{aligned}
x^* &= f(z_L^*, z_H^*) \\
&= (z_L^*)^{1/3} (z_H^*)^{1/3} \\
&= \left(\frac{p^3}{27w_L^2 w_H}\right)^{1/3} \left(\frac{p^3}{27w_L w_H^2}\right)^{1/3} \\
&= \frac{p^2}{9w_L w_H} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

である．ここで (87) を見ると，利潤を最大化する労働投入ベクトル (z_L^*, z_H^*) が w_L や w_H，p の関数になっていることが分かる．これは，賃金率 w_L, w_H や財価格 p に応じて，企業が投入する労働量 z_L^*, z_H^* が異なったものになるということである．この事実を強調するために，利潤を最大化する労働投入ベクトルを $z_L^d(w_L, w_H, p), z_H^d(w_L, w_H, p)$ と書き，これを労働需要関数と呼ぶ．つまりこの例では，一般職と専門職に対する労働需要関数はそれぞれ

$$
z_L^d(w_L, w_H, p) = \frac{p^3}{27w_L^2 w_H}, \quad z_H^d(w_L, w_H, p) = \frac{p^3}{27w_L w_H^2}
$$

である．同様に，(88) を見ると，利潤を最大化する生産量 x^* も w_L や w_H，p の関数になっていることが分かる．これは，賃金率 w_L, w_H や財価格 p に応じて，企業が生産する財の量 x^* が異なったものになるということである．やはりこの事実を強調するために，利潤を最大化する生産量を $x^s(w_L, w_H, p)$ と書き，これを供給関数と呼ぶ．つまりこの例では，供給関数は

$$
x^s(w_L, w_H, p) = \frac{p^2}{9w_L w_H} \qquad (89)
$$

である．

A.3 費用関数を用いた表現

企業の生産技術は，費用関数によっても表現することが可能である．費用関数とは，生産物の産出量 x に対して，それだけの産出量を実現するために必要となる最小の費用 $c(x)$ を対応させるような関数 c のことである．あるトマト生産企業の生産技術が費用関数 c によって表現されるとき，それは例えば，「この企業が x' だけのトマトを生産するためには最低でも $c(x')$ だけの費用が必要であり，さらに生産量を増やして $x'' > x'$ だけのトマトを作るとなると，そのための費用は $c(x'') > c(x')$ に増えてしまう」とったことを意味する．基本的なアイディアは，1 種類しか生産要素を用いない場合と変わらない．

ただ，生産要素が複数ある場合，企業の生産技術を費用関数で表現するには若干

の工夫が必要になる．本文で扱ったような 1 種類の生産要素（z のみ）から財を生産する場合には，労働の投入量と財の産出量とが一対一の関係にあったため，生産関数から費用関数を導出する手続きは単純なものであった．生産関数が $x = f(z)$ のように与えられている場合，x 単位の財を生産するための方法は一通りに限られる．つまり，x 単位の財を生産するには $C(x) := f^{-1}(x)$ 単位の労働を投入する以外に方法がない．したがって，費用関数（x 単位の財を生産するのに必要な最小の費用）は $c(x) := wC(x)$ と書ける．これに対して，2 種類の生産要素（z_L と z_H の組み合わせ）を用いて財を生産する場合，x 単位の財を生産する方法は一通りではない．一方の生産要素の投入量（例えば一般職の労働時間）を減らしても，他方の生産要素の投入量（専門職の労働時間）を増やすことで，同じ x 単位の財を生産することが可能だからである．例えば，企業の生産関数 $x = f(z_L, z_H)$ が (80) のような形で与えられているとき，

$$f(2,4) = 2^{1/3}4^{1/3} = 8^{1/3} = 2$$

であるから，$(z_L, z_H) = (2,4)$ という要素投入量の組み合わせによって 2 単位の財を生産することができる．一方，$(z_L, z_H) = (1,8)$ という別の組み合わせ（一般職の労働を減らし専門職の労働を増やすこと）を考えると

$$f(1,8) = 1^{1/3}8^{1/3} = 8^{1/3} = 2$$

であるから，この方法でも 2 単位の財を生産することが可能である．他にも，$(z_L, z_H) = (4,2)$ や $(z_L, z_H) = (8,1)$，あるいは $(z_L, z_H) = (16, 1/2)$ といったように，同じ 2 単位の財を生産する方法は無数に考えられる．したがって，一般に「x 単位の財を生産する最小の費用」を求めるためには，x 単位の財を生産できる無数の方法の中から最も安上がりなものを選び出す作業が必要になる．そのような，ある一定量の財を生産する最小の費用を求める問題を費用最小化問題（cost minimization problem）と呼ぶ．

費用最小化問題は次のように定式化される．まず，少なくとも x 単位の財を生産することのできる (z_L, z_H) の組を全て集めたものを $Z(x) \subset \mathbb{R}^2_+$ と書こう．すなわち

$$Z(x) := \left\{ (z_L, z_H) \in \mathbb{R}^2_+ \mid f(z_L, z_H) \geq x \right\}$$

である．この $Z(x)$ に含まれる z_L と z_H の組の中で，費用を最も小さくできるものを (z_L^*, z_H^*) と書こう．するとこの (z_L^*, z_H^*) は，

$$w_L z_L^* + w_H z_H^* \leq w_L z_L + w_H z_H \quad \forall (z_L, z_H) \in Z(x) \tag{90}$$

かつ

$$(z_L^*, z_H^*) \in Z(x) \tag{91}$$

を満たすはずである．(90) と (91) を満たすような (z_L^*, z_H^*) のことを，費用最小化問題の解と呼ぶ．ここで注意すべきことは，賃金率 (w_L, w_H) や目標とする生産量 x が変われば，費用最小化問題の解も変わってくるということである．一般職の賃金率 w_L よりも専門職の賃金率 w_H の方が高い場合と，逆に w_L の方が w_H よりも高い場合とでは，費用を最小化できる (z_L^*, z_H^*) は異なったものになろう．また，少ない量の財（例えば $x = 2$）を生産する場合と大量の財（例えば $x = 10$）を生産する場合とでは，当然ながら費用を最小化できる (z_L^*, z_H^*) は変わってくる．したがって，(90) と (91) を満たすような (z_L^*, z_H^*) は (w_L, w_H, x) の関数になる．この点を強調するために，費用最小化問題の解を $(C_L(w_L, w_H, x), C_H(w_L, w_H, x))$ と書くことにしよう．すると，x 単位の財を生産するための最小の費用は

$$c(x) := w_L C_L(w_L, w_H, x) + w_H C_H(w_L, w_H, x)$$

のように表現することができる[11]．これが，2 種類の生産要素を用いて生産活動を行う企業の費用関数である．費用関数 $c(x)$ は，1 種類の生産要素のみを用いる場合と同様に，企業の生産技術を「財をどれだけ少ない費用で作ることができるか」という観点から特徴付けたものと解釈できる．

それでは，費用最小化問題を解いて費用関数を導出してみよう．費用最小化問題の解は，次の定理を用いて特徴付けることができる．

定理 1. 生産要素の投入量ベクトル $(z_L^*, z_H^*) \in \mathbb{R}_+^2$ が費用最小化問題の解であるならば

$$\frac{f_1(z_L^*, z_H^*)}{f_2(z_L^*, z_H^*)} = \frac{w_L}{w_H} \tag{92}$$

および

$$f(z_L^*, z_H^*) = x \tag{93}$$

が成立していなければならない．

この定理の証明は次節で与えるので，関心のある読者はそちらを参照して欲しい．定理 1 を用いると，費用最小化問題の解を見付け出すためには，(92) と (93) とを連立させて，それを (z_L^*, z_H^*) について解けばよいことが分かる．なお，生産関数の偏微分係数 $f_i(z_L, z_H)$ のことを限界生産（marginal product）と呼び，偏微分係数の比 $f_1(z_L, z_H)/f_2(z_L, z_H)$ のことを技術的代替率（technical rate of substitution）と呼ぶ．この表現を用いれば，(92) の条件は「技術的代替率が生産要素の相対価格に等しい」と読むことができる．

具体例として，企業の技術が (80) のような生産関数によって代表されている

[11] 費用関数は生産量 x だけでなく賃金率 w_L, w_H にも依存することになるので，本来であれば $c(w_L, w_H, x)$ のように書くべきであろう．が，ここでは表記が煩雑になるのを避けるため，w_L, w_H を省略して $c(x)$ と書く．

場合を考える．このとき，各生産要素に関する限界生産は

$$f_1(z_L, z_H) = \frac{1}{3} z_L^{-2/3} z_H^{1/3}, \quad f_2(z_L, z_H) = \frac{1}{3} z_L^{1/3} z_H^{-2/3}$$

であるから，技術的代替率は

$$\frac{f_1(z_L, z_H)}{f_2(z_L, z_H)} = \frac{\frac{1}{3} z_L^{-2/3} z_H^{1/3}}{\frac{1}{3} z_L^{1/3} z_H^{-2/3}} = \frac{z_H}{z_L}$$

である．よって，もし (z_L^*, z_H^*) がこの企業の費用最小化問題の解であるならば，定理 1 から，

$$\frac{f_1(z_L^*, z_H^*)}{f_2(z_L^*, z_H^*)} = \frac{w_L}{w_H} \iff \frac{z_H^*}{z_L^*} = \frac{w_L}{w_H} \tag{94}$$

および

$$f(z_L^*, z_H^*) = x \iff (z_L^*)^{1/3} (z_H^*)^{1/3} = x \tag{95}$$

を同時に満たすはずである．この 2 つの方程式を連立させて (z_L^*, z_H^*) について解けば良い．まず，(94) を z_H^* について解くと

$$\frac{z_H^*}{z_L^*} = \frac{w_L}{w_H} \iff z_H^* = \frac{w_L}{w_H} z_L^* \tag{96}$$

のように書けるから，この z_H^* を (95) に代入して

$$(z_L^*)^{1/3} \left(\frac{w_L}{w_H} z_L^* \right)^{1/3} = x \iff z_L^* = \left(\frac{w_H}{w_L} \right)^{1/2} x^{3/2}$$

を得る．さらに，今求めた z_L^* を (96) に代入すれば

$$z_H^* = \frac{w_L}{w_H} \left(\frac{w_H}{w_L} \right)^{1/2} x^{3/2} = \left(\frac{w_L}{w_H} \right)^{1/2} x^{3/2}$$

を得る．したがって，連立方程式 (94)–(95) の解 (z_L^*, z_H^*) は，

$$(z_L^*, z_H^*) = \left(\left(\frac{w_H}{w_L} \right)^{1/2} x^{3/2}, \left(\frac{w_L}{w_H} \right)^{1/2} x^{3/2} \right) \tag{97}$$

であり，これが x 単位の財を最も小さい費用で生産できる z_L と z_H の組である．

いま求めた (z_L^*, z_H^*) が，(w_L, w_H, x) の値によって変化することに注意しよう．したがって，既に予告しておいた通り，費用最小化問題の解は要素価格と生産量の関数になる．このことをより明示的に表現するために，費用最小化問題の解 (z_L^*, z_H^*)

を

$$C_L(w_L, w_H, x), \quad C_H(w_L, w_H, x) \tag{98}$$

のように書く．つまり

$$C_L(w_L, w_H, x) := \left(\frac{w_H}{w_L}\right)^{1/2} x^{3/2}, \quad C_H(w_L, w_H, x) := \left(\frac{w_L}{w_H}\right)^{1/2} x^{3/2} \tag{99}$$

である[12]．これらを用いると，費用関数は

$$\begin{aligned} c(x) &:= w_L C_L(w_L, w_H, x) + w_H C_H(w_L, w_H, x) \\ &= w_L \left(\frac{w_H}{w_L}\right)^{1/2} x^{3/2} + w_H \left(\frac{w_L}{w_H}\right)^{1/2} x^{3/2} \\ &= 2 w_L^{1/2} w_H^{1/2} x^{3/2} \end{aligned} \tag{100}$$

のように求まる．この $c(x)$ が，x 単位の財を最も上手く（最も安上がりに）生産した場合に必要になる費用である．

費用関数をいったん求めてしまえば，企業の利潤最大化問題は，1 種類の生産要素を用いる場合と全く同様に記述することができる．つまり，企業の生産技術が $c(x)$ という費用関数によって代表されているとき，その企業は，

$$x^* \in \operatorname*{argmax}_{x \in \mathbb{R}_+} \{px - c(x)\} \tag{101}$$

を満たす x^* を生産する．(101) は 1 変数関数の最大化問題であるから，x^* がこの問題の解であるならば

$$(px - c(x))' |_{x=x^*} = 0 \iff p = c'(x^*) \tag{102}$$

が成立するはずである．したがって，利潤を最大化する生産量 x^*（それはすなわち供給関数 $x^s(w_L, w_H, p)$ である）は，1 種類の生産要素を用いる場合と全く同様に「限界費用が価格に等しくなるように」決定される．例えば，ある企業の技術が (100) のような費用関数によって代表されているとき，利潤を最大化する生産量 x^* は

$$p = c'(x^*) \iff 3 w_L^{1/2} w_H^{1/2} (x^*)^{1/2} \iff x^* = \frac{p^2}{9 w_L w_H}$$

[12] この例からは，ある生産要素の価格（例えば w_L）が上昇すると，その生産要素の投入量（C_L）を減らして別の生産要素の投入量（C_H）を増やすほうがよい，という自然な関係が見てとれる．一方，より多くの財を生産しようとした（つまり x が増加した）場合には，いずれの生産要素の投入量も増やさざるを得ないという，これまた直観と整合的な関係も表現されている．

を満たすはずであるから，この企業の供給関数は

$$x^s(w_L, w_H, p) = \frac{p^2}{9w_L w_H} \tag{103}$$

である．ここで求めた供給関数 (103) が，前節で生産関数を用いて求めた供給関数 (89) に一致することに注意しよう．生産関数と費用関数は同じ生産技術を 2 つの異なる方法で特徴付けたものであるから，いずれの方法を用いても，結果として導かれる供給関数は一致するのである．

A.4 定理 1 の証明

最後に，定理 1 の証明を与えておこう．定理 1 自体の証明に入る前に，次の補題（補助定理）を理解しておくとよい．

補題 1. 生産要素の投入量ベクトル (z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるとする．このとき，定数 $c_* \in \mathbb{R}$ を

$$c_* := w_L z_L^* + w_H z_H^*, \tag{104}$$

で定義し[13]，部分集合 $S(w_L, w_H, c_*) \subset \mathbb{R}_+^2$ を

$$S(w_L, w_H, c_*) := \left\{ (z_L, z_H) \in \mathbb{R}_+^2 \mid w_L z_L + w_H z_H = c_* \right\} \tag{105}$$

で定義すると[14]，(z_L^*, z_H^*) は制約付き最大化問題

$$(z_L^*, z_H^*) \in \underset{(z_L, z_H) \in S(w_L, w_H, c_*)}{\operatorname{argmax}} f(z_L, z_H) \tag{106}$$

の解になる．つまり，(z_L^*, z_H^*) は集合 $S(w_L, w_H, c_*)$ の上で関数 $f(z_L, z_H)$ を最大化する[15]．

証明. 証明は背理法による．つまり「仮に補題の主張が間違っているならば必ずどこかで辻褄が合わなくなってしまうので補題の主張は正しくなければならない」というロジックを用いて証明する．

背理法の仮定として，(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるにもかかわらず，それが制約付き最大化問題 (106) の解ではないとする．すると，投入量ベクトル (z_L^*, z_H^*) は $S(w_L, w_H, c_*)$ 上で関数 $f(z_L, z_H)$ を最大化しないので，別の投入量ベ

[13] つまり，企業が投入量ベクトル (z_L^*, z_H^*) を選んだときにかかる費用を c_* と書く．

[14] つまり，(z_L^*, z_H^*) を選んだ場合と同じだけの費用がかかる (z_L, z_H) の組を全て集めたものを $S(w_L, w_H, c_*)$ と書く．

[15] これは言い換えれば，(z_L^*, z_H^*) と同じだけの費用がかかる別の投入量ベクトルの中に，(z_L^*, z_H^*) を選んだ場合よりもたくさんの財を生産できるものは存在しない，ということである．

クトル $(\tilde{z}_L, \tilde{z}_H)$ が存在して

$$f(\tilde{z}_L, \tilde{z}_H) > f(z_L^*, z_H^*) \tag{107}$$

かつ

$$(\tilde{z}_L, \tilde{z}_H) \in S(w_L, w_H, c_*) \overset{(105)}{\iff} w_L\tilde{z}_L + w_H\tilde{z}_H = c_* \tag{108}$$

が成り立つはずである．生産要素の投入量を「ほんの少し」だけ変化させても生産量は「ほんの少し」だけしか変わらないはずであるから[16]，(107) が成り立っているということは，

$$f(\tilde{z}_L - \epsilon, \tilde{z}_H - \epsilon) \geq f(z_L^*, z_H^*) \tag{109}$$

が十分小さい $\epsilon > 0$ について成立するはずである．したがって，そのような $\epsilon > 0$ を用いて

$$(\tilde{\tilde{z}}_L, \tilde{\tilde{z}}_H) := (\tilde{z}_L - \epsilon, \tilde{z}_H - \epsilon)$$

なる（また）別の投入量ベクトル $(\tilde{\tilde{z}}_L, \tilde{\tilde{z}}_H)$ を考えると，この投入量ベクトルは

$$\begin{aligned} w_L\tilde{\tilde{z}}_L + w_H\tilde{\tilde{z}}_H &= w_L(\tilde{z}_L - \epsilon) + w_H(\tilde{z}_H - \epsilon) \\ &= w_L\tilde{z}_L + w_H\tilde{z}_H - (w_L + w_H)\epsilon \\ &< w_L\tilde{z}_L + w_H\tilde{z}_H \\ &\overset{(108)}{=} c_* \\ &\overset{(104)}{=} w_L z_L^* + w_H z_H^* \end{aligned} \tag{110}$$

および

$$f(\tilde{\tilde{z}}_L, \tilde{\tilde{z}}_H) = f(\tilde{z}_L - \epsilon, \tilde{z}_H - \epsilon) \overset{(109)}{\geq} f(z_L^*, z_H^*)$$

を同時に満たす．つまり，$(\tilde{\tilde{z}}_L, \tilde{\tilde{z}}_H)$ と (z_L^*, z_H^*) とを比較すると，前者の方が厳密に低い費用で，少なくとも同じだけの量の財を生産することができる．これは，(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解である（より低い費用で同じだけの財を生産できる生産要素の組は他に存在しない）ということに矛盾する．

したがって，「(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるにもかかわらず制約付き最大化問題 (106) の解ではない」という仮定は誤りでなければならず，その論理的な帰結として，「(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるならば必ず制約付き最大化問題 (106) の解でもある」と結論できる． **（証明終）**

補題 1 を用いて定理 1 を証明しよう．生産要素の投入量ベクトル (z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるとする．このとき，補題 1 により，(z_L^*, z_H^*) は制約付

[16]厳密には，この議論は生産関数が「連続性」と呼ばれる性質を満たしているときしか成り立たない．入門レベルのミクロ経済学で登場する生産関数のほとんどはこの性質を満たす．

き最大化問題

$$(z_L^*, z_H^*) \in \operatorname*{argmax}_{(z_L, z_H) \in S(w_L, w_H, c_*)} f(z_L, z_H) \tag{111}$$

の解である．ここで，この問題が数学補論で扱った制約付き最大化問題と全く同じ形をしていることに注意しよう．すると，数学補論の定理 3 から直ちに，(z_L^*, z_H^*) は

$$\frac{f_1(z_L^*, z_H^*)}{f_2(z_L^*, z_H^*)} = \frac{w_L}{w_H} \tag{112}$$

を満たすことがまず分かる．また，$(z_L^*, z_H^*) \in Z(x)$ である（つまり (z_L^*, z_H^*) を投入すると少なくとも x 単位の財を生産することができる）ことから

$$f(z_L^*, z_H^*) \geq x \tag{113}$$

も成り立つ．ここで仮に

$$f(z_L^*, z_H^*) > x \tag{114}$$

であったとする（つまり (z_L^*, z_H^*) を投入すると x 単位より多くの財を生産できる）と，補題 1 の証明と同様のロジックから，要素投入量を少しだけ減らしても依然として x 単位以上の財を生産することができ，なおかつ費用を減らすことができることになってしまうので，(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるという事実に矛盾する．したがって (114) が成立している可能性はありえず，

$$f(z_L^*, z_H^*) = x \tag{115}$$

が成立していなければならない．以上から，(z_L^*, z_H^*) が費用最小化問題の解であるならば，(112) と (115) を同時に満たすと結論できる．